9/10/2015

Προσανατολισμός στο $\mathbb{R}^2$:

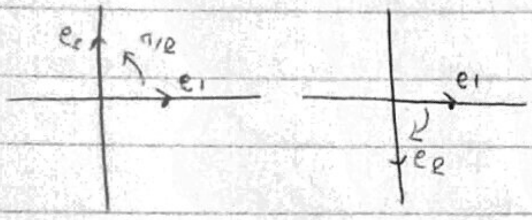
Έστω $\{u_1, u_2\}$ τυχούσα βάση.

-||- $\{w_1, w_2\}$ -||- -||-

Τότε $w_j = \sum_i a_{ij} u_i$ $\quad (a_{ij})$ 2×2 πίνακας αντιστρέψιμος.

Ορισμός: Οι βάσεις (διατεταγμένες) $\{u_1, u_2\}$, $\{w_1, w_2\}$ λέμε ότι ανήκουν στον ίδιο προσανατολισμό αν-ν $\det(a_{ij}) > 0$.

πχ



Οι βάσεις $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, -e_2\}$ δεν έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.

Σύμβαση: Ο προσανατολισμός της $\{e_1, e_2\}$ καλείται θετικός.

Ορισμός: Έστω $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμικός ισομορφισμός. Η A διατηρεί τον προσανατολισμό $\Longleftrightarrow \det A > 0$.

Διαφορίσιμες απεικονίσεις στον $\mathbb{R}^n$ μιας μεταβλητής.

Έστω $V: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ διανυσματική συνάρτηση.

$I \ni t \longmapsto V(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))$

Οι συναρτήσεις $v_1, \ldots, v_n : I \to \mathbb{R}$ καλούνται συναρτήσεις συντεταγμένων της V.

Η V είναι διαφορίσιμη αν-ν $\forall\, t_0 \in I$ υπάρχει το $\lim_{t \to t_0} \frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n$

//

Η παράγωγος της V στο t_0 είναι $V'(t) = \frac{dV}{dt}(t_0)$

Γνωρίζουμε ότι: Η v είναι διαφορ. $\Leftrightarrow u_1, \dots, u_n$ διαφορίσιμες

Η v είναι $C^k \Leftrightarrow u_1, \dots, u_n$ είναι C^k

$v'(t) = (u_1'(t), \dots, u_n'(t))$

Κανόνες παραγώγισης: Αν v, w διαφορίσιμες και η f διαφ. συνάρτηση τότε:

(1) $v+w$ είναι διαφορίσιμη με $(v+w)' = v' + w'$

(2) fv -//- -//- με $(fv)' = fv' + f'v$

(3) $\langle v, w\rangle$ είναι διαφορίσιμη και $\langle v, w\rangle' = \langle v', w\rangle + \langle v, w'\rangle$

Απόδειξη: $v = (u_1, \dots, u_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$

$\langle v, w\rangle = \sum_i u_i w_i$

$\langle v, w\rangle' = \sum_i (u_i w_i)' = \sum_i (u_i' w_i + u_i w_i') = \sum_i u_i' w_i + \sum_i u_i w_i' = \langle v', w\rangle + \langle v, w'\rangle$

$\boxed{n=3}$

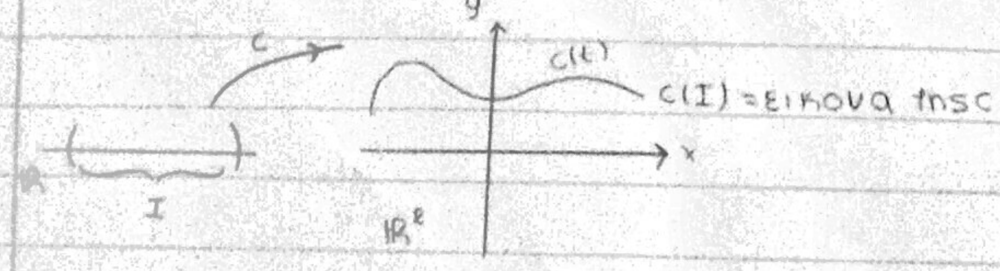
(4) $v \times w$ είναι διαφορίσιμη και: $(v \times w)' = v' \times w + v \times w'$

(5) Αν v, w, z διαφορ. διανυσματικές απεικονίσεις $\Rightarrow [v, w, z]$ είναι λεία και $[v, w, z]' = [v', w, z] + [v, w', z] + [v, w, z']$

Παρατήρηση: Αν $\boxed{|v| = \text{σταθ}} \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\langle v, v\rangle'} = 2\langle v, v'\rangle \Rightarrow \boxed{v \perp v'}$

Καμπύλες στο $\mathbb{R}^2$

Ορισμός: Μια καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ είναι μια απεικόνιση $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (I = ανοιχτό διάστημα) διαφορίσιμη (C^k, $k \geq 2$) (λεία)



t είναι η παράμετρος της c

$c(t) = (x(t), y(t))$

Ορισμός:

Το διάνυσμα $c'(t_0) = \frac{dc}{dt}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ καλείται εφαπτόμενικό διάνυσμα ή διάνυσμα ταχύτητας της c στο t_0, $c'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} \neq 0$

(Για να βρούμε ευθεία χρειαζόμαστε ένα σημείο της κ' ένα $u \neq 0$, u = διαν.)

Ορισμός: Μια καμπύλη $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καλείται κανονική αν-ν για $t \in I$ έχω $c'(t) \neq (0,0) \iff \|c'(t)\| > 0$.

Για κανονικές καμπύλες η ευθεία η οποία διέρχεται από το $c(t_0)$ και είναι παράλληλη προς το $c'(t_0)$ καλείται εφαπτόμενη ευθεία της c στο t_0.

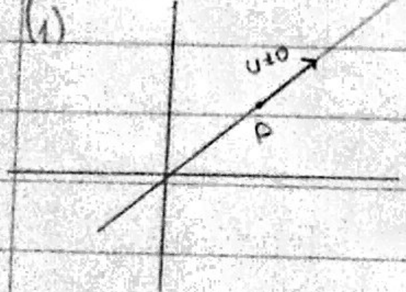
Γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες.

Ορισμός: Δυο καμπύλες $c, \tilde{c}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καλούνται γεωμετρικώς ισότιμες αν-ν $\exists\, T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ ώστε $\tilde{c} = T \circ c$

Πρόβλημα: Τι καθορίζει μια καμπύλη (ως προς ισομετρία του $\mathbb{R}^2$);

παραδείγματα:

(1)



$c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = ut + p$

Είναι λεία με εφαπτόμενικό διάνυσμα $c'(t) = u \neq 0$

$\Longrightarrow$ Η c είναι κανονική.

$c(\mathbb{R})$ = ευθεία που διέρχεται από το p και είναι // u

(2) $c_2(t) = t^3 u + p$, $c_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ λεία με εφαπτ. διάνυσμα $c_2'(t) = 3t^2 u$

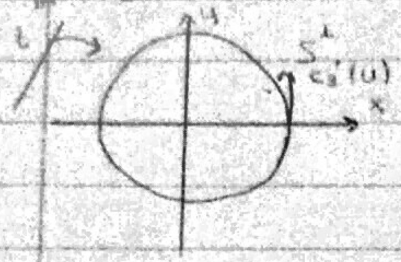
$c_2(\mathbb{R}) = c_1(\mathbb{R})$

$c_2'(0) = 0 \Rightarrow$ Η c_2 <u>ΔΕΝ</u> είναι κανονική.

(3) $c_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad c_3(t) = (\cos t, \sin t)$

με διανυσμα ταχυτητας $c_3'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\|c_3'(t)\| = 1 > 0 \Rightarrow$ H c_3 ειναι κανονική.



$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$c_3(\mathbb{R}) = S^1$, $\quad c_3'(0) = (0,1)$

$c_3(0) = (1,0)$

(4) $c_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad c_4(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ ειναι λεια με

$c_4'(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t)$.

$\|c_4'(t)\| = 2 > 0$ Άρα κανονικη.

$c_4(\mathbb{R}) = S^1$

(5) $c_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad c_5(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$.

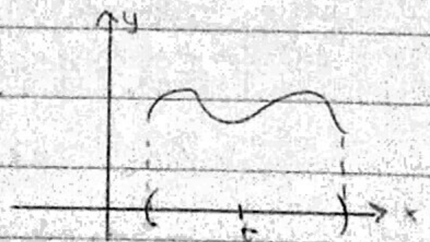
λεια (C^∞) με $c_5'(t) = (-2t\sin t^2, 2t\cos t^2)$

$c_5'(0) = 0 \Rightarrow c_5$ <u>ΔΕΝ</u> ειναι κανονικη.

$c_5(\mathbb{R}) = S^1$

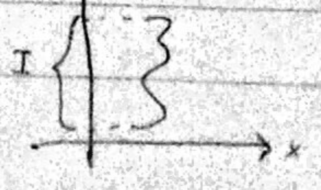
<u>Γραφήματα</u>

Εστω $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λεια



H καμπύλη $c : I \to \mathbb{R}^2$ με $c(t) = (t, f(t))$ καλειται γραφημα της c ως προς τον αξονα Ox

Ως προς τον αξονα Oy το γραφημα ειναι η καμπύλη $c(t) = (f(t), t)$



Ερωτημα: Αν $c: I \to \mathbb{R}^2$ ειναι κανονική και $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$ ειναι η $\tilde{c} = T \circ c$ κανονικη;

Γνωρίζουμε ότι $T = T_v \circ R_\theta$ ή $T = T_v \circ K_\theta$

$T_v(x,y) = (x,y) + (v_1, v_2) = (x + v_1, y + v_2)$

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

$T(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta + v_1, x\sin\theta + y\cos\theta + v_2)$

$c(t) = (x(t), y(t))$, $\tilde{c}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = x(t)\cos\theta - y(t)\sin\theta + v_1 \\ \tilde{y}(t) = x(t)\cos\theta + y(t)\sin\theta + v_2 \end{cases}$$

$\tilde{c}'(t) = (\tilde{x}'(t), \tilde{y}'(t)) = (x'(t)\cos\theta - y'(t)\sin\theta, x'(t)\sin\theta + y'(t)\cos\theta) =$

$= R_\theta(x'(t), y'(t)) \Rightarrow \tilde{c}'(t) = R_\theta(c'(t)) \neq 0.$

$\|\tilde{c}''(t)\| = \|R_\theta(c'(t))\| = \|c'(t)\|$

Επομενως το ερωτημα ειναι σωστο.

Γραφηματα: $c(t) = (t, f(t)) \Rightarrow c'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0)$

Άρα τα γραφηματα ειναι παντα κανονικα.

Εστω $c(t) = (x(t), y(t))$ κανονική καμπύλη $t_0 \in I$.

$0 \neq c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \iff x'(t_0) \neq 0$ ή $y'(t_0) \neq 0$.

Υποθετω ότι $x'(t_0) \neq 0 \xRightarrow{C^1} x'(t) \neq 0 \;\; \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$

($\varepsilon > 0$ πολύ μικρη) $\Rightarrow$ $x'(t) > 0 \;\; \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ ή $x'(t) < 0 \;\; \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$

$\Rightarrow$ Η συναρτηση $x = x(t)$ αντιστρεφεται στο $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ δηλ. $t = t(x)$ λεια.

$t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $c(t) = (x(t), y(t)) = (x, \underbrace{y(t(x))}_{=f(x)}) = (x, f(x))$

$c(t) = (t, f(t))$ $\quad c(t_1) = c(t_2) \Rightarrow (t_1, f(t_1)) = (t_2, f(t_2)) \Rightarrow t_1 = t_2$

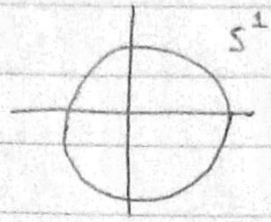
Άρα τα γραφηματα δεν εχουν αυτοτομες.

Πρoταση: Αν $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ειναι κανονική καμπυλη τοτε καθε t_0 περιεχεται σε διαστημα $I_0 \subseteq I$ ωστε η $c|_{I_0}$ να ειναι γραφημα (ειτε ως προς Ox ειτε ως προς Oy).

$c_1(t) = (\cos t, \sin t)$

$c_2(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$

$c_3(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$



* $c_2 = c_1 \circ f$, $f(t) = t^2 \Rightarrow c_2' = f' \, c_1' \circ f$ — Αυτο που χαλαει την κανονικοτητα ειναι το $f'(0) = 0$

* $c_3 = c_1 \circ g$, $g(t) = 2t \Rightarrow c_3' = g' \, c_1' \circ g$, $g'(t) = 2$

Αναπαραμετρηση

Ορισμος: Ειναι $c: I \to \mathbb{R}^2$ κανονική, $c(t)$ καμπυλη και $f: J \subseteq \mathbb{R} \to I$, $t = f(\tilde{t})$ λεια με $\frac{df}{d\tilde{t}} > 0$ παντού στο J ή $\frac{df}{d\tilde{t}} < 0$ παντου στο J.

Η καμπυλη $\tilde{c}: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $\tilde{c} = c \circ f$ καλειται αναπαραμετρική της c.

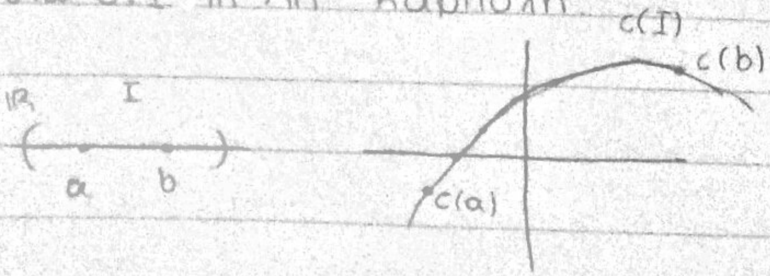
Παρατηρηση: 1) Η $\tilde{c}$ ειναι κανονική.

Αποδειξη: $\frac{d\tilde{c}}{d\tilde{t}} = \frac{dt}{d\tilde{t}} \frac{dc}{dt} = \frac{dt}{d\tilde{t}} \underbrace{\frac{dc}{dt}}_{\neq 0} \neq 0$

2) Η c και η $\tilde{c}$ εχουν την ιδια εικόνα, δηλ. $c(I) = \tilde{c}(J)$

Μηκος καμπυλης:

Εστω $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπυλη.



Έστω $P=\{a=t_0<t_1<\dots<t_k=b\}$ διαμερίση του διαστήματος $[a,b]\subset I$
Η πολυγωνική γραμμή με άκρα τα σημεία $c(t_0), c(t_1), \dots, c(t_k)$ έχει μήκος $L(c,P)=\sum_{i=1}^{k} d(c(t_i),c(t_{i-1}))=\sum_{i=1}^{k}\|c(t_i)-c(t_{i-1})\|$. Η λεπτότητα της διαμέρισης P είναι ο αριθμός $|P|=\max\{|t_i-t_{i-1}|, i=1,\dots,k\}$
Θεωρούμε ακολουθία διαμερίσεων P_n με $\lim_{n\to\infty}|P_n|=0$. $\lim_{n\to\infty} L(c,P_n)$

Θεώρημα: Αν η c είναι C^1 τότε το $\lim_{n\to\infty} L(c,P_n)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο της επιλογής της (P_n).
Ισχύει: $\lim_{n\to\infty} L(c,P_n)=\int_a^b \|c'(t)\|\,dt$ και καλείται μήκος της c από το a έως το b. $L_a^b(c)=\int_a^b \|c'(t)\|\,dt$.